

Օժտված երեխաների մրցույթ <<Քվանտ-2020>>

Երրորդ փուլ  
9-րդ դասարան  
Լուծումներ

1. Հաջորդականությունն ունի հետևյալ օրինաչափությունը. առաջին անդամը 7 է, իսկ յուրաքանչյուր հաջորդ անդամ ստացվում է իր նախորդ անդամի քառակուսու թվանշանների գումարին ավելացրած 1: Գտնել այդ հաջորդականության 2020-րդ անդամը:

**Լուծում:** Գրենք այդ հաջորդականության մի քանի անդամներ.

7; 14; 17; 20; 5; 8; 11; 5; 8; 11; 5; 8; 11; 5;... : Նկատենք, որ չորրորդ անդամից հետո 5; 8; 11 թվերի եռյակը անընդհատ կրկնվում է: Հեշտ է նկատել, որ 2020-րդ անդամը կլինի 11:

Պատ՝ 11:

2. 1990 հատ գիրքը վաճառելու համար տրվեց երեք տարբեր գրախանութների: Առաջին գրախանութը առաջին օրը վաճառեց իր ստացած գրքերի  $\frac{1}{37}$  մասը, երկրորդ օրը՝  $\frac{1}{11}$  մասը, իսկ երրորդ օրը՝  $\frac{1}{2}$  մասը: Երկրորդ գրախանութը առաջին, երկրորդ, երրորդ օրերին վաճառել է իր ստացած գրքերի համատասխանաբար՝  $\frac{1}{57}, \frac{1}{9}$  և  $\frac{1}{3}$  մասերը: Երրորդ գրախանութը առաջին, երկրորդ, երրորդ օրերին վաճառել է իր ստացած գրքերի համատասխանաբար՝  $\frac{1}{25}, \frac{1}{30}$  և  $\frac{1}{10}$  մասերը: Գտնել առաջին օրը գրախանութների վաճառած գրքերի ընդհանուր քանակը:

**Լուծում:** Ենթադրենք առաջին գրախանութը ստացել է  $x$  գիրք, երկրորդ գրախանութը՝  $y$  գիրք, երրորդ գրախանութը՝  $z$  գիրք: Խնդրի պայմանից հետևում է, որ  $x$ -ը պետք է լինի 814-ին բազմապատիկ,  $y$ -ը՝ 171-ին,  $z$ -ը՝ 150-ին: Նկատենք, որ առաջին գրախանութը 814-ից շատ գիրք չի ստացել (քանի որ  $1628+171+150=1948$ ,  $1628+300+171>1990$ ):

Ուրեմն առաջին գրախանութը ստացել է 814 գիրք: Դիցուք  $y=171m$ ,  $z=150n$ :

Կունենանք՝  $814+171m+150n=1990$ , կամ  $171m+150n=1176$ , որտեղից՝

$150n=1176-171m$ , հետևաբար  $171m$ -ը պետք է վերջանա 6-ով:

Այսպիսով,  $m=6$  ( $m \geq 16$  դեպքում  $1176-171m < 0$ )  $\Rightarrow 150n=1176-1026 \Rightarrow n=1$ :

Ուրեմն, առաջին գրախանութը ստացել է 814 գիրք, երկրորդ գրախանութը՝

1026, երրորդ գրախանութը՝ 150 գիրք:

Առաջին օրը երեք գրախանութների վաճառած գրքերի քանակը կլինի՝

$$\frac{814}{37} + \frac{1026}{57} + \frac{150}{25} = 22+18+6=46:$$

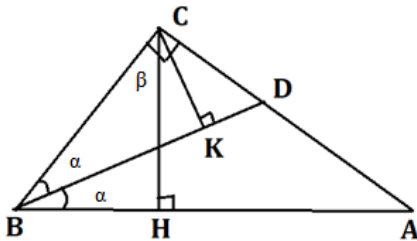
Պատ.՝ 46 գիրք:

3.  $6^{2020} - 2^{2020}$  թիվը պարզ արտադրիչների վերլուծելիս ինչի՞ է հավասար 2-ի աստիճանացույցը:

**Լուծում:**  $6^{2020} - 2^{2020} = 2^{2020}(3^{2020} - 1) = 2^{2020}(81^{505} - 1)$ : Ապացուցենք, որ  $(81^{505} - 1)$  թիվը բաժանվում է 16-ի, բայց չի բաժանվում 32-ի: Իրոք,  $81^{505} - 1 = 81^{505} - 81 + 80 = 81(81^{504} - 1) + 80 = 81 \cdot (81 - 1)(81^{503} + 81^{502} + \dots + 1) + 80 = 81 \cdot 80 \cdot (81^{503} + 81^{502} + \dots + 1) + 80 = 81 \cdot 80a + 80$ , որտեղ  $a = (81^{503} + 81^{502} + \dots + 1)$  գույգ թիվ է: Հետևաբար առաջին գումարելին բաժանվում է 32-ի, իսկ երկրորդը՝ 80-ը չի բաժանվում 32-ի, բայց բաժանվում է 16-ի:

Պատասխան՝ 2024:

4. BD-ն C ուղիղ անկյունով ABC ուղղանկյուն եռանկյան կիսորդն է, K կետը BD-ի վրա վերցված է այնպես, որ  $CK \perp BD$  և  $BK=3KD$ : Գտնել KCH անկյան մեծությունը, որտեղ CH-ը ABC եռանկյան բարձրությունն է:



**Լուծում:** Նշանակենք  $KD=x$ ,  $BK=3x$

Ըստ հայտնի առնչության՝ կիրառած BCD ուղղանկյուն եռանկյանը.

$$CK^2 = BK \cdot KD \Rightarrow CK^2 = 3x \cdot x = 3x^2 \Rightarrow CK = x\sqrt{3}$$

$$\begin{cases} BK = 3x \\ CK = x\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow BC = 2x\sqrt{3}, \alpha = 30^\circ \Rightarrow \beta = 30^\circ \Rightarrow$$

$$\angle KCH = \angle KCB - \beta = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$$

Պատ.՝  $30^\circ$ :

5. Լուծել  $3xy + 3yz + 3xz = 5xyz + 3$ , հավասարումը, որտեղ  $x$ -ը,  $y$ -ը և  $z$ -ը բնական թվեր են:

**Լուծում:** Ենթադրենք  $x \leq y \leq z$ , այդ դեպքում  $3xy + 3yz + 3xz \leq 3yz + 3yz + 3yz = 9yz$ , իսկ  $5xyz + 3 \geq 10yz + 3$  (եթե  $x \geq 2$ ):

Հետևաբար, հավասարման աջ և ձախ մասերը կարող են հավասար լինել միայն  $x=1$  դեպքում: Քննարկենք այդ դեպքը:  $x=1 \Rightarrow 3y + 3yz + 3z = 5yz + 3 \Rightarrow 3y + 3z = 2yz + 3$  (\*)

Քանի որ  $y \leq z \Rightarrow 3y + 3z \leq 6z$ , իսկ  $2yz + 3 \geq 6z + 3$  (եթե  $y \geq 3$ )

Հետևաբար, (\*) հավասարման աջ և ձախ մասերը կարող են իրար հավասար լինել միայն  $y=1$  կամ  $y=2$  դեպքերում:

$$y=1 \Rightarrow 3 + 3z = 2z + 3$$

$$z=0 \text{ (բնական թիվ չէ)}$$

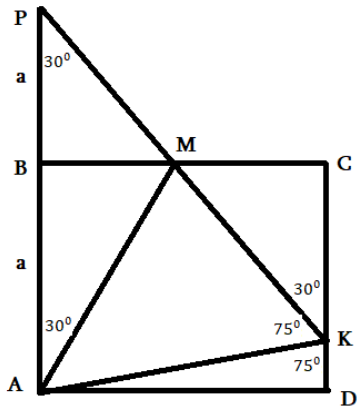
$$y=2 \Rightarrow 6 + 3z = 4z + 3 \Rightarrow z=3:$$

Այսպիսով,  $x \leq y \leq z$  պայմանի դեպքում  $x=1$ ,  $y=2$ ,  $z=3$ : Փոփոխականները ցիկլիկ փոխելով, կստանանք, մյուս լուծումները:

Պատ.՝ (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1):

6. ABCD քառակուսու BC և CD կողմերի վրա համապատասխանաբար M և K կետերն վերցված են այնպես, որ  $\angle BAM = \angle CKM = 30^\circ$ : Գտնել  $\angle AKD$ -ն:

**Լուծում:** Շարունակենք  $KM$  ուղիղը և  $AB$ -ի հետ հատման կետը նշանակենք  $P$ -ով:



Պարզ է, որ  $\angle APK = 30^\circ$ : Նշանակենք քառակուսու կողմը  $a$ -ով: Քանի որ  $\triangle PBM = \triangle ABM$ , ապա  $AP = 2a$ : Նկատենք, որ  $PM = AM = 2BM$  և  $MK = 2MC$ : Այդ դեպքում  $PK = 2BM + 2MC = 2a$ , ուրեմն եռանկյուն  $APK$ -ն հավասարասրուն է՝  $AP = PK$ : Ստացվեց, որ  $\angle AKP = 75^\circ$ ,  $\angle AKD = 180^\circ - (75^\circ + 30^\circ) = 75^\circ$ :

Պատ.՝  $75^\circ$ :