Օժտված երեխաների մրցույթ «Քվանտ-2020»
Երրորդ փուլ
7-րդ դասարան

Լուծումներ

1. *7-րդ դասարանի աշակերտների 60%-ը աղջիկներ են: Երբ հիվանդության պատճառով դասի չեկան երկու տղա և մեկ աղջիկ, աղջիկները կազմեցին ներկաների 62,5%-ը: Քանի՞ տղա և քանի՞ աղջիկ կա դասարանում:*

Լուծում: Քանի որ աղջիկները կազմում են դասարանի 60%-ը, այսինքն **3/5** մասը, ապա տղաների քանակը կարող ենք նշանակել 2x-ով, իսկ աղջիկներինը՝ 3x-ով: Նշված բացակայությունների պայմաններում տղաների քանակը դառնում է 2x-2, իսկ աղջիկներինը՝ 3x-1 (ընդամենը՝ 5x-3 աշակերտ): Եվ քանի որ այդ նոր իրավիճակում աղջիկները կազմում են ներկաների 62,5%, այսինքն **5/8** մասը, ապա

$$\frac{3x-1}{5x-3}=\frac{5}{8} \Rightarrow x=7 \Rightarrow 2x=14, 3x=21$$

Պատ.՝ 14 տղա, 21 աղջիկ:

2. *Գտնել 1-ից մինչև 1000 բոլոր այն բնական թվերի քանակը, որոնց գրառման մեջ գոնե մեկ անգամ օգտագործված է 3 թվանշանը:*

Լուծում: Միանիշ թվերի մեջ 3-ը պարունակող միայն մեկ թիվ կա՝ հենց 3-ը: Երկնիշ թվերի մեջ (որոնց քանակը 90 է) ավելի դյուրին է հաշվել 3-ը չպարունակող թվերի քանակը՝ 8×9=72 ⇒ 3 թվանշանը պարունակող երկնիշ թվերի քանակը հավասար է 90-72=**18 հատ**: Նմանապես, եռանիշ թվերի մեջ 3 թվանշանը պարունակող թվերի քանակը հավասար է 900-8×9×9=**252 հատ** (պարզ է, որ վերջին թիվը՝ 1000-ը, կարելի է անտեսել): Այսպիսով, ընդհանուր քանակը հավասար է 1+18+252 = 271:

Պատ.՝ 271 հատ:

3. *Գտնել* $50 + 50^2 + 50^3 + \cdots + 50^{7007}$ *թիվը 49-ի բաժանելիս ստացված մնացորդը:*

Լուծում: Օգտվենք այն հայտնի փաստից, որ $(a^n - 1)$ -ը բաժանվում է $(a - 1)$-ի, որտեղ $a -$ ն և n-ը բնական թվեր են, ընդ որում՝ $a > 1$: Հետևաբար, քանի որ

$$50 + 50^2 + 50^3 + \cdots + 50^{7007} =$$

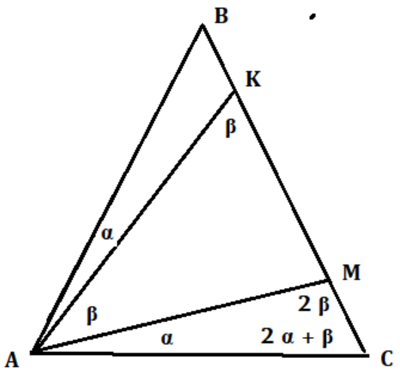
$$=(50 - 1) + (50^2 - 1) + (50^3 - 1) + \cdots + (50^{7007} - 1) + \underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{7007 \text{ հատ}},$$

ապա մնում է պարզել, թե ինչ մնացորդ կստացվի 7007-ը 49-ի բաժանելիս: Ակնհայտորեն , այդ մնացորդը 0 է, քանի որ 7007-ը բաժանվում է 49-ի:

Պատ.՝ 0 :

4. *ABC հավասարասրուն եռանկյան մեջ (AB=BC) BC սրունքի վրա K և M կետերը վերցված են այնպես, որ AM=MK, <BAK=<MAC , իսկ K կետը գտնվում է B և M կետերի միջև: Գտնել KAC անկյունը:*

Լուծում: Նշանակենք **<BAK = <CAM = α, <KAM = β:** Քանի որ **AM = KM ⇒ <AKM = β ⇒ <AMC = 2 β** (որպես արտաքին անկյուն): Քանի որ **AB = BC ⇒ <A = <C = 2 α + β :** Դիտարկելով եռանկյուն **AMC-ն** ՝ գրենք, որ նրա անկյունների գումարը հավասար է 180^0, կունենանք **$\alpha + 2\beta + 2\alpha + \beta = 180^0 \Rightarrow \alpha + \beta = 60^0$ ⇒ <KAC = 60^0** :



Պատ.՝ 60^0 :

5. *Լուծել 71x+13y=xy-14 հավասարումը, որտեղ x-ը և y-ը բնական թվեր են:*

Լուծում: Տրված հավասարումից արտահայտենք y -ը x -ով.

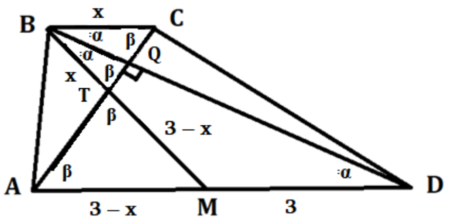
$y = \frac{71x+14}{x-13} = 71 + \frac{937}{x-13}$:

Հետևաբար, 937-ը պետք է բաժանվի $(x - 13)$ –ի: Եվ քանի որ 937-ը պարզ թիվ է ⇒ $x - 13 = 1$ կամ $x - 13 = 937$ ⇒ $x = 14$ կամ $x = 950$: Վերջապես, $x = 14 \Rightarrow y = 1008$ և $x = \mathbf{950} \Rightarrow y = \mathbf{72}$:

Պատ.՝ (14;1008), (950;72) :

6. ABCD քառանկյան մեջ BC||AD, BD ⊥ AC: AD կողմի վրա M կետը վերցված է այնպես, որ BM=MD=3: Գտնել (AD+BC)-ն:

Լուծում: Նախ, հարմարության համար **AC** և **BM** հատվածների հատման կետը նշանակենք **T**-ով, իսկ անկյունագծերի հատման կետը՝ **Q**-ով: Քանի որ **BM = MD ⇒ <MBD = <MDB =α:** Մյուս կողմից, **<CBD = <MDB =α** (որպես ներքին խաչադիր անկյուններ): Հետևաբար, **<MBD = <CBD =α,** այսինքն եռանկյուն **TBC**-ում **BQ**-ն միաժամանակ կիսորդ է և բարձրություն **⇒** եռանկյուն **TBC**-ն հավասարասրուն է **⇒ BT = BC = x**, **<BTC = <BCT = β :** Դժվար չէ նկատել նաև, որ **<MTA = β** և **<MAT = β** համապատասխանաբար որպես հակադիր և ներքին խաչադիր անկյուններ: Ստացվեց, որ եռանկյուն **AMT**-ն նույնպես հավասարասրուն է **⇒ MT = MA = 3-x:** Այժմ նկատենք, որ **AD = 3 + 3 – x = 6 – x**, իսկ **BC=x ⇒ AD + BC = 6-x +x =6:**



Պատ.՝ 6 :